數學傳播　49卷4期, pp. 27-55

Euler 餘元公式之隨想

林琦焜

1. 三位一體的 Γ-函數

『我希望本書的讀者能夠尊重這門學科的歷史連續性。複變函數論是長期發展的成果, 凝聚了許多學者的貢獻。許多冠上人名之定理, 他們在世當時都是著名數學家。一個學生應該了解數學的歷史發展以及在這一演變過程中發揮重要作用的人物。他應該將數學理解爲一個鮮活的有機體, 一門不斷成長的學問, 它由許多人的努力所滋養。如果可能的話, 他應該對那些建構了他所研究體系的數學家們懷有崇敬之情。』

— E. Hille (1894∼1980) [6] 之前言 —

Γ-函數於西元 1729 年誕生於兩位數學家之間的通信, 其中瑞士人歐拉 (Leonhard Euler, 1707∼1783) 當時身在聖彼得堡, 而德國人哥德巴赫 (Christian Goldbach, 1690∼1764) 則是在莫斯科。Γ-函數、beta-函數及其衍生的 Riemann zeta 函數是除了基本函數之外最重要的特殊函數, 18、19 世紀最偉大的數學家例如, Daniel Bernoulli (1700∼1782)、歐拉(Leonhard Euler)、高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777∼1855)、Adrien-Marie Legendre (1752∼1833)、Karl Weierstrass (1815∼1897) 與黎曼 (Bernhard Riemann, 1826∼1866) 在此都留下影響深遠的足跡。Γ-函數的起源脫離不了階乘 (factorial) 的概念, 因此要理解 Γ-函數, 最好從底下這個積分出發

$$\int_0^1 (-\log x)^n dx = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt = n!, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

由於被積分函數是指數函數與多項式函數的相乘, 計算這個積分最自然的方法是 — 分部積分 (integration by parts) 將多項式 t^n 消去。事實上等式 (1.1) 右邊的階乘 $n!$ 是有意義的, 它代表分部積分 n 次, 而且分部積分這個動作導致積分 (1.1) 最終是《乘積》(multiplication) 的緣由。另外 (1.1) 左右兩邊是有本質上的差異, 根據階乘的定義, n 必須是正整數然而左邊的積分, 只需 n 滿足適當的範圍, 使得積分收斂即可。藉由此觀察, 偉大的瑞士數學家歐拉 (L. Euler) 將正整數 n 取代爲非整數的 α, 並定義非整數的階乘爲

$$\alpha! \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha dt, \qquad \alpha > -1. \tag{1.2}$$

階乘就由正整數的乘法《代數運算》提升爲由積分所定義的《函數》! 由於 α 不是正整數, 分部積分這個動作無法停止, 所以階乘最後成爲《無窮乘積》! 後來法國數學家 Legendre 將 $\alpha > -1$ 平移成爲 $z > 0$, 並以希臘字母 Γ 來命名。[1]

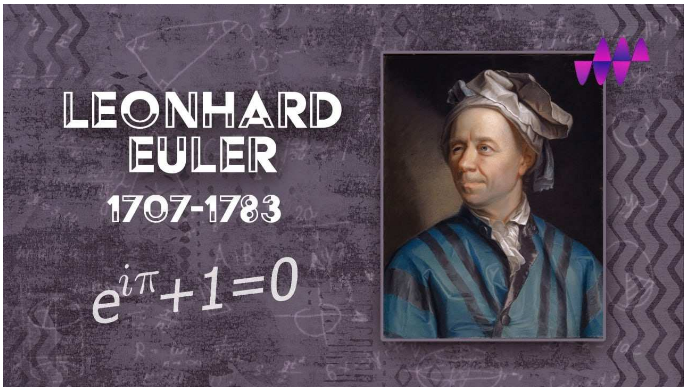


圖1: Leonhard Euler (1707∼1783)

定義 1.1: (Γ-函數 — 歐拉積分版本, 1729)

$$\Gamma(z) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad z > 0. \tag{1.3}$$

這裡我們取自變數爲 z 不是 x 主要理由, 是 Γ-函數可以延拓至複數 $\mathbb{C}$, (1.3) 對於 $z = x + iy, x > 0$ 仍然成立, 爲了簡便整篇文章我們都將 z 當作實數來看待。積分收斂的範圍 $z > 0$ 是可以透過量綱分析來看的。根據瑕積分的定義 $\Gamma(z)$ 可以拆解爲太瘦與太胖兩部分:

$$\Gamma(z) = I_1 + I_2 \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1.4}$$

(1.4) 這個分解動作也稱爲Prym 分解 (Prym's decomposition)。這是德國數學家 Friedrich Emil Fritz Prym (1841∼1915) 的貢獻。根據 L'Hospital 法則當 $t \to \infty$ 時, e^{-t} 趨近於 0 的速度比所有的冪函數 t^{z-1} 趨近於無窮大的速度都要來得快, 所以 I_2 收斂, 也就是 $\Gamma(z)$ 沒有太胖的問題! 另外當 $t \to 0$ 時 (我們要考慮瘦瘦高高的情形),

$$e^{-t} \le 1 \quad \Longrightarrow \quad e^{-t} t^{z-1} \sim t^{z-1} \quad \Longrightarrow \quad z - 1 > -1 \quad \Longrightarrow \quad z > 0,$$

或做個量綱分析

$$[I_1] = [t^{z-1}][dt] = [t]^z, \quad [t] \to 0 \quad \Longrightarrow \quad z > 0.$$

[1]Beta 函數與 Γ 函數最開始是稱爲 Euler 第一與第二類積分, 既然 Euler 第一類積分稱爲 beta 函數, 那麼 Euler 第二類積分按照希臘字母的順序自然要稱爲 gamma 函數, 所以 Legendre 以大寫字母 Γ 來表示完全是合理並且可以想像! 只是我無法理解當初爲何沒有從希臘第一個字母 α, A 開始命名! 另外有數學史的八卦如此說: Legendre 是將他的姓開頭『L』倒過來變成『Γ』來命名的! 這個說法很有想像力但只是猜測並沒有根據。

解決了收斂性問題, 也就是說由積分 (1.3) 所定義的函數是明確定義的 (well-defined)。積分 I_2 是 z 的一個全 (整) 函數 (entire function), 而積分 I_1 則由於積分範圍是 $0 < t < 1$; 若將指數函數 e^{-t} 展開爲無窮級數, 並與等比級數比較可以證明是一致收斂 (uniform convergence), 因此可以變換積分與無窮級數的順序得 Γ-函數的 Mittag-Leffler 展開式[2]

$$\Gamma(z) = I_1 + I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1.5}$$

不僅如此, 作爲分析極限定理的應用還可以證明 $\Gamma(z)$ 是連續且無窮多次可微 $(z > 0)$

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} (\log t)^n dt, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1.6}$$

但是Γ-函數的微分在特殊函數論並不是那麼重要! 反而是對數微分 (logarithmic derivative)

$$\Psi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \tag{1.7}$$

這背後的理由要等到Γ-函數的無窮乘積 (1.13) 才看得清楚。藉由分部積分可以證明

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = -t^z e^{-t}\Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z),$$

也就是 $\Gamma(z)$ 滿足函數方程 (functional equation) 或遞推公式

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad z > 0. \tag{1.8}$$

重複分部積分這個動作可得一般式 $(n \in \mathbb{N})$

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)\cdots(z+n-1)\Gamma(z), \qquad z > 0. \tag{1.9}$$

令 $z = 1$ 並利用 $\Gamma(1) = 1$ 可推得 $\Gamma(n+1) = n!$。這就解釋了爲何 Γ-函數是階乘的推廣。但是公式不僅僅是公式, 它是有意義會講話的! 藉由函數方程 (1.8) 與 (1.9) 可以重新定義 $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad \Longrightarrow \quad z+1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad z > -1. \tag{1.10}$$

$$\Gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \quad \Longrightarrow \quad z+n > 0 \quad \Longrightarrow \quad z > -n. \tag{1.11}$$

---

[2]Mittag-Leffler 定理是複變函數論中對半 (亞) 純函數做級數展開的定理, 它表明複數平面上的一個半 (亞) 純函數可以用較爲簡單有理分式函數做級數展開。如果 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的有界函數並且它的極點 a_n 都是非零的一階極點, 那麼

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res}\big(f(z), a_n\big)\Big(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\Big). \tag{$*$}$$

由於級數所在位置正好是極點, 這個展開式也稱爲對極點求和 (sum over poles)。

也就是說: 透過函數方程 (1.8)–(1.9), 可以逐步地將 Γ-函數從 $z > 0$ 解析延拓 (analytical continuation) 到全部的複數平面 $\mathbb{C}$, 但付出的代價是 $z \neq 0, -1, -2, \ldots$, 因爲這些點正是 Γ-函數的一階極點 (simple pole)。將 (1.11) 略作調整可以得高斯版本的 Γ-函數:

定義 1.2: (Γ-函數 — 高斯版本) $\quad z \neq 0, -1, -2, \ldots$

$$\Gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}. \tag{1.12}$$

高斯這個定義因爲包含極限而略嫌不足, 但已經隱含了無窮乘積。最後取消極限這個符號, 並完善無窮乘積理論主要是 Weierstrass 的貢獻:

定義 1.3: (Γ-函數 — Weierstrass 版本) Γ-函數可以表示爲 Weierstrass 形式的無窮乘積

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}, \tag{1.13}$$

其中

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \log n\right] \tag{1.14}$$

是 Euler-Mascheroni 常數, 它的選取必須滿足 $\Gamma(1) = 1$。

由高斯或 Weierstrass 的定義 (1.12)、(1.13) 明顯可知 $z = 0, -1, -2, \ldots$ 是 Γ-函數的一階極點 (simple pole)。這是歐拉積分版本 (1.3) 不容易看出來的! 回到 Γ 函數的對數微分 (1.7), 由 Weierstrass 的無窮乘積 (1.13) 容易推得

$$\begin{cases} \Psi(z) = \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{z+n}\right), \\ \Psi'(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}. \end{cases} \tag{1.15}$$

Γ-函數這三個定義分別以《積分》、《極限》還有《無窮乘積》的形式表現出來, 它們彼此是等價的, 在後面會討論, 這也是我稱之爲三位一體的原因! 在基督教的神學中,《三位一體》(trinity) 是一個核心概念, 它表明了聖父、聖子、聖靈的位格和關係。所謂「位格」(persons), 原爲希臘文, 意指演員在舞台臉上所戴的面具, 後來用以表示「個人」或「個體」。神學上, 它代表的是具有感情、意志、良知, 並能與另一位格彼此互動的個體。在三位一體思想中上帝的三個面具, 目的是用來啟示祂的真性, 而不是用來隱藏祂自己。上帝的「三位一體」, 就是指獨一的真神擁有三個位格, 即聖父、聖子、聖靈【即一而三】, 而三者又同時存在於同一個本體 (substance) 之中【即三而一】。「三位一體」思想之所以重要, 一方面是因爲它挽救了基督教的命運, 免於退

化爲外邦的多神思想; 另一方面是它提出基督教的信仰保證; 神在基督裡, 對耶穌基督負責。由於其根本重要性, 許多著名大學的學院都以三位一體 (trinity) 來命名, 例如劍橋大學三一學院 (Trinity College, Cambridge) 是劍橋大學中規模最大、財力最雄厚、名聲最響亮的學院, 牛頓就是三一學院的, 另外多倫多大學的三一學院也是模仿劍橋大學而來。順便一提的是 2023 年全球最令人矚目的電影 —《奧本海默》, 一部足以載入影史的神作! 裡面就談到美國物理學家奧本海默 (J. Robert Oppenheimer, 1904∼1967) 將曼哈頓計畫中的核試爆稱爲《三位一體》。

直接與 Γ-函數相關的就是 Beta 函數, 它與 Γ-函數的緊密結合是透過 Γ-函數之乘積

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \lim_{R\to\infty}\iint_{\Omega} s^{p-1}t^{q-1}e^{-(s+t)}dsdt, \tag{1.16}$$

其中$\Omega = [0,R]\times[0,R]$。如果考慮變數變換

$$\begin{cases} u = s+t \\ v = t \end{cases} \iff \begin{cases} s = u-v, \\ t = v, \end{cases}$$

則 $\left|\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)}\right| = 1$ 且將正方形區域 Ω 變換爲三角形區域 $\Omega' = \{(u,v)|0\le u\le R, 0\le v\le u\}$, 所以 (1.16) 成爲累次積分

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \lim_{R\to\infty}\iint_{\Omega'}(u-v)^{p-1}v^{q-1}e^{-u}dudv \\ &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-u}\left(\int_0^u (u-v)^{p-1}v^{q-1}dv\right)du.\end{aligned} \tag{1.17}$$

再進一步考慮變數變換 $v = u\xi$ 則 (1.17) 可以改寫爲

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-u}u^{p+q-1}du\int_0^1(1-\xi)^{p-1}\xi^{q-1}d\xi \\ &= \Gamma(p+q)\int_0^1(1-\xi)^{p-1}\xi^{q-1}d\xi \\ &= \Gamma(p+q)\int_0^1 \tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1}d\tau, \qquad (\tau = 1-\xi).\end{aligned} \tag{1.18}$$

最後出現的積分正是 Beta 函數。這個結果是歐拉發現的, 它聯繫了 Euler 第一類與第二類積分兩者的關係。

定義 1.4: (Beta函數 — Euler 第一類積分)

$$\mathscr{B}(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad p,q>0. \tag{1.19}$$

要提醒的是 $\mathscr{B}$ 代表大寫的希臘第二個字母 β (念爲 beta) 它相當於英文的 B。仿 Γ-函數, $\mathscr{B}(p,q)$ 收斂的範圍 $p,q>0$ 也是可以透過量綱分析來看的。這個瑕積分沒有太胖的問題、但是太瘦的地方有 $t=0$ 與 $t=1$ 兩處, 可以拆解爲:

$$\mathscr{B}(p,q)=\tilde{I}_1+\tilde{I}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt.$$

做個量綱分析可以結論:

$$[\tilde{I}_1]=[t^{p-1}][dt]=[t]^p,\quad [t]\to 0 \quad\Longrightarrow\quad p>0,$$

$$[\tilde{I}_2]=[(1-t)^{q-1}][dt]=[1-t]^q,\quad [1-t]\to 0 \quad\Longrightarrow\quad q>0.$$

分別作變數變換: $(0\to t\to 1)$

$$\begin{cases} t=1-s, & 1\to s\to 0,\quad t\text{與}1-t\text{角色互換} \quad\Longrightarrow\quad \mathscr{B}(p,q)=\mathscr{B}(q,p),\\ t=\cos^2\theta, & \dfrac{\pi}{2}\to\theta\to 0,\quad \text{極座標: 化}x\text{軸正半徑爲四分之一圓之弧長},\\ t=\dfrac{1}{1+\xi}, & \infty\to\xi\to 0,\quad \text{反轉加平移:}\quad 1\to 0,\quad 0\to\infty \quad\Longrightarrow\ \xi=\dfrac{1-t}{t},\\ t=\dfrac{\eta}{1+\eta}, & 0\to\eta\to\infty,\quad \text{平移加反轉:}\quad 0\to 0,\quad 1\to\infty \quad\Longrightarrow\quad \eta=\dfrac{t}{1-t}. \end{cases}$$

可將 (1.19) 改寫爲底下常見的形式

$$\begin{aligned} \mathscr{B}(p,q)=\mathscr{B}(q,p)&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\ \sin^{2q-1}\theta d\theta\\ &=\int_0^\infty \frac{\xi^{p-1}}{(1+\xi)^{p+q}}d\xi=\int_0^\infty \frac{\xi^{q-1}}{(1+\xi)^{p+q}}d\xi=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\eta^{p-1}+\eta^{q-1}}{(1+\eta)^{p+q}}d\eta. \end{aligned} \tag{1.20}$$

當 $p=z, q=1-z$, 就是本文要探討的餘元公式 (Euler 反射公式): $(x=\frac{t}{1-t})$

$$\begin{cases} \mathscr{B}(z,1-z)=\displaystyle\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}dt=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^z\frac{dt}{t}=\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x}dx,\\ \mathscr{B}(1-z,z)=\displaystyle\int_0^1 t^{-z}(1-t)^{z-1}dt=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{-z}(1-t)dt=\int_0^\infty \frac{x^{-z}}{1+x}dx. \end{cases} \tag{1.21}$$

回到 Γ-函數, (1.5) 或 (1.11) 很清楚地告訴我們, $\Gamma(z)$ 是一個一階極點 (simple pole) 在 $z=0,-1,-2,\ldots$ 的半 (亞) 純函數 (meromorphic function)[3], 且根據 (1.11) 計算留數

[3]mero 源自希臘文 meros, 意思是部分或分數, 而 morphism 則是 (可見的)形象的意思。

(residue)

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\big(\Gamma(z),-n\big) &= \lim_{z\to -n}\frac{(z+n)\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\\ &= \lim_{z\to -n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!},\end{aligned}\tag{1.22}$$

正是 (1.5) 部分分式之係數。所以

$$\operatorname{Res}\big(\mathscr{B}(z,1-z),-n\big) = \Gamma(1+n)\operatorname{Res}\big(\Gamma(z),-n\big) = n!\cdot\frac{(-1)^n}{n!} = (-1)^n. \tag{1.23}$$

同理 $\Gamma(1-z)$ 則是極點在 $z=1,2,3,\ldots$ 的半 (亞) 純函數, 且留數爲

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\big(\Gamma(1-z),n\big) &= \lim_{z\to n}\frac{(z-n)\Gamma(1-z+n)}{(1-z)(2-z)\cdots(n-z)}\\ &= \lim_{z\to n}\frac{-\Gamma(1-z+n)}{(1-z)(2-z)\cdots(n-1-z)} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}.\end{aligned}\tag{1.24}$$

所以

$$\operatorname{Res}\big(\mathscr{B}(z,1-z),n\big) = \Gamma(n)\operatorname{Res}\big(\Gamma(1-z),n\big) = (n-1)!\frac{(-1)^n}{(n-1)!} = (-1)^n. \tag{1.25}$$

兩個 Γ-函數相乘之後的 beta 函數 $\mathscr{B}(z,1-z)$ 與 $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ 不僅有相同的極點還有相同的留數 (residue):

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)},n\right) = \lim_{z\to n}(z-n)\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{\cos(n\pi)} = (-1)^n, \qquad n\in\mathbb{Z}. \tag{1.26}$$

這進而引領人們研究這兩個函數之間的關係, 這就是探索餘元公式的初衷。

定理 1.4: (Euler 餘元公式, 1771) 已知 $0<z<1$ 則

$$\mathscr{B}(z,1-z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \tag{1.27}$$

實際上 $z\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots$, 由正弦函數明顯可知 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ 是週期等於 2 的週期函數。利用 $z\Gamma(z)=\Gamma(1+z)$ 可以將 (1.27) 改寫爲更對稱的形式

$$\mathscr{B}(1+z,1-z) = \Gamma(1+z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)}, \tag{1.28}$$

或者更廣義的形式

$$\Gamma(n+z)\Gamma(n-z) = [(n-1)!]^2\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right), \qquad n=1,2,\ldots. \tag{1.29}$$

由於 $z=\frac{1}{2}$ 是對稱軸, 可以考慮變數變換 $z\to z+\frac{1}{2}$, 將 (1.28) 改寫爲

$$\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}-z,\frac{1}{2}+z\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)=\frac{\pi}{\cos(\pi z)}. \tag{1.30}$$

比較 (1.28)、(1.30) 兩式得出互餘的關係, 這也是我們稱之爲餘元公式的緣由。

註解:

(i) 餘元公式或 Euler 反射公式說明了 Γ 函數與圓函數 (circular function) 即三角函數的關係, 這是當初 Euler 透過正弦函數之無窮乘積來推得 Γ 函數的原因。

(ii) (1.17)−(1.18) 的推導方法基本上是將正方形化爲三角形 (simplex), 如果仍堅持正方形區域可以仿 Poisson-高斯積分利用極座標的計算方法並利用 (1.20) 得

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s+t)}s^{p-1}t^{q-1}dsdt \qquad (s=x^2,\ t=y^2)\\&=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy\ (x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta)\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta drd\theta\\&=2\int_0^\infty r^{2(p+q)-1}\ e^{-r^2}dr\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ \cos^{2p-1}\theta\ \sin^{2q-1}\theta d\theta\\&=\Gamma(p+q)\ \mathscr{B}(p,q).\end{aligned} \tag{1.31}$$

(iii) 我們也可以透過 Laplace 變換來看這個事實 (這是 Dirichlet 的想法):

$$\mathscr{L}[t^{z-1}]=\int_0^\infty e^{-st}t^{z-1}dt=\frac{\Gamma(z)}{s^z}. \tag{1.32}$$

令 $z=p+q$、$s=1+\xi$, 則 (1.32) 成爲

$$\frac{1}{(1+\xi)^{p+q}}=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty e^{-(1+\xi)t}t^{p+q-1}dt, \tag{1.33}$$

則由 (1.20) 可以將 Beta 函數 $\mathscr{B}(p,q)$ 改寫爲重積分, 再藉由 Fubini 定理變換積分順序得

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(p,q)&=\int_0^\infty\frac{\xi^{p-1}}{(1+\xi)^{p+q}}d\xi\\&=\int_0^\infty\xi^{p-1}\left(\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty e^{-(1+\xi)t}t^{p+q-1}dt\right)d\xi\\&=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty e^{-t}t^{q-1}dt\int_0^\infty e^{-t\xi}(t\xi)^{p-1}d(t\xi)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.\end{aligned} \tag{1.34}$$

2. Dirichlet 積分 — Dirichlet 的觀點

『一個學生如果不想自己的工作徒勞無果, 他就應當去閱讀且反覆閱讀那些大師的作品, 直到書的作者深入他心, 就像融入了他的血肉裡那樣。』

— 馬丁-路得 (桌邊談話錄, 1533) —

在數學中, 不只一種積分稱作 Dirichlet 積分, 都由德國數學家 Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805~1859) 提出。

定理 2.1: (Dirichlet 積分) 已知 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1\}$ 是一個三角形區域, Dirichlet 積分是一個雙重積分

$$I=\iint_{\Omega} x^{p-1}y^{q-1}dxdy=\frac{1}{p+q}\mathscr{B}(p,q),\qquad p,q>0. \tag{2.1}$$

證明一: 典型的雙重積分 (double integral) 是化爲累次積分 (iterated integral) 來計算, 其重點是區域的劃分。第一種情形 (沿 x-軸切割): $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$,

$$\begin{aligned} I&=\int_0^1 x^{p-1}\Big(\int_0^{1-x} y^{q-1}dy\Big)dx=\frac{1}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx\\ &=\frac{1}{q}\mathscr{B}(p,q+1)=\frac{1}{q}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q)\Gamma(p+q)}=\frac{1}{p+q}\mathscr{B}(p,q). \end{aligned} \tag{2.2}$$

第二種情形 (沿 y-軸切割): $0\le y\le 1$, $0\le x\le 1-y$,

$$\begin{aligned} I&=\int_0^1 y^{q-1}\Big(\int_0^{1-y} x^{p-1}dx\Big)dy=\frac{1}{p}\int_0^1 y^{q-1}(1-y)^p dy\\ &=\frac{1}{p}\mathscr{B}(q,p+1)=\frac{1}{p}\frac{\Gamma(q)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+1)}=\frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{(p+q)\Gamma(p+q)}=\frac{1}{p+q}\mathscr{B}(q,p). \end{aligned} \tag{2.3}$$

證明二: 利用累次積分, 並不是那麼漂亮也不直接了當 ! 由於 Ω 是一個三角形區域, 所以 Dirichlet 引進三角變換 (由於這原因我們稱這一類的積分爲 Dirichlet 積分),

$$\begin{cases}\xi=x+y\\ \eta=y\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}x=\xi-\eta,\\ y=\eta,\end{cases} \tag{2.4}$$

並將 Ω 轉換爲長方形區域

$$\Omega'=\{(\xi,\eta)|\quad 0\le\xi\le 1,\quad 0\le\eta\le\xi\}\,.$$

還可以進一步將長方形區域轉換爲正方形區域

$$0 \le \eta \le \xi \quad \Longrightarrow \quad 0 \le \frac{\eta}{\xi} \le 1.$$

這相當於將 (2.4) 略做改變

$$\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = \dfrac{y}{x+y} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \xi(1-\eta), \\ y = \xi\eta. \end{cases} \tag{2.5}$$

此時 Ω 轉換爲單位方塊

$$\Omega'' = \{(\xi,\eta)|\ 0 \le \xi \le 1, \quad 0 \le \eta \le 1\}.$$

此時雙重積分 I 可分離爲兩個一維積分的相乘

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Omega x^{p-1}y^{q-1}dxdy = \iint_{\Omega''} \xi^{p-1}(1-\eta)^{p-1}(\xi\eta)^{q-1}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}d\xi d\eta \\ &= \int_0^1 \xi^{p+q-1}du \int_0^1 (1-\eta)^{p-1}\eta^{q-1}d\eta = \frac{1}{p+q}\mathscr{B}(q,p). \end{aligned}$$

我們可以重複 (1.16)–(1.18) 的計算

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \int_0^\infty s^{-z}t^{z-1}e^{-(s+t)}dsdt = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{-1}\left(\frac{t}{s}\right)^z e^{-(s+t)}dsdt.$$

由最後這個積分, 可以仿 Dirichlet 的想法 (2.5), 考慮變數變換

$$\begin{cases} u = s + t \\ v = \dfrac{t}{s} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} s = \dfrac{u}{1+v}, \\ t = \dfrac{uv}{1+v}, \end{cases} \tag{2.6}$$

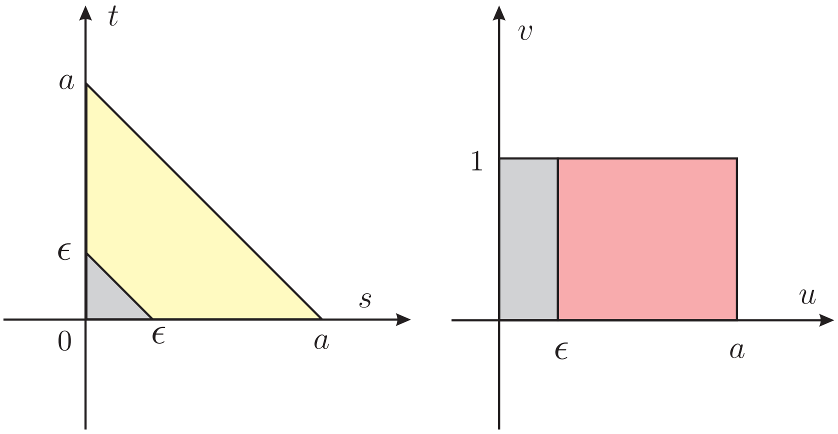
並計算其 Jacobian 得

$$\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} s_u & s_v \\ t_u & t_v \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^2}.$$

則由 Fubini 定理得

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty e^{-u}du \int_0^\infty \frac{v^{z-1}}{1+v}dv = \int_0^\infty \frac{v^{z-1}}{1+v}dv. \tag{2.7}$$

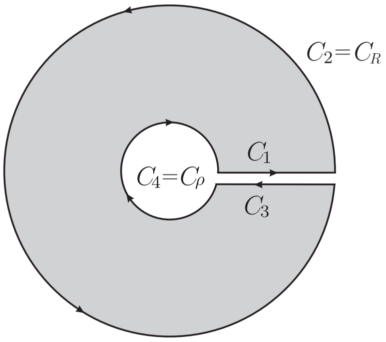
所以想推論餘元公式 (1.27) 中間的關鍵步驟是計算 (2.7) 最後這個瑕積分。



圖二: 變數變換: $(s,t)\mapsto(u,v)$

3. 複變函數論 — Cauchy 的觀點

西元 1814 年至 1831 年間, 法國數學家柯西 (A. Cauchy, 1789∼1857) 創建了複變函數論的基本架構, 主要是解決積分的問題。探討 Γ-函數與 Beta 函數離不開複變函數論, 尤其是 Cauchy 積分公式與留數定理 (Residue Theorem) 這兩個計算積分的重要方法。底下這個積分並不是爲了考驗學生計算留數的功力刻意造出的! 正如 (2.7) 所顯示的。它對於研究 Γ-函數與 Beta 函數是不可或缺的工具, 我們覺得有必要特別討論:



圖三: 圍道 C

例題 3.1: 給定 $0<a<1$

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{1+x}dx=\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y}dy=\frac{\pi}{\sin(a\pi)},\quad y=\frac{1}{x}. \tag{3.1}$$

解: 我們將利用複變函數論的留數定理來處理這個積分。對應原積分可以考慮圍道積分 (contour integral)

$$\oint_C \frac{z^{-a}}{1+z}dz. \tag{3.2}$$

首先對被積分函數 $\frac{z^{-a}}{1+z}$ 而言, $z=0$ 是一個分歧點 (branch point), 因此要克服此難題典型的手法是取一個 branch cut, 好像剪紙一般, 從 $z=0$ 沿 x-軸 (正) 方向剪開, 所以所取的圍道好像一個玉珮或鏤空的英文字 C (參考圖三), 外圍是半徑等於 R 的圓 C_R, 而內圍則是半徑爲 ρ 的小圓 C_ρ 就像是甜甜圈一般, 因爲 $z=-1$ 是一階極點 (simple pole), 由留數定理知

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{z^{-a}}{1+z}dz &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-a}}{1+z};-1\right) = 2\pi i \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^{-a}}{1+z}\\ &= 2\pi i(-1)^{-a} = 2\pi i e^{-ia\pi}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

這裡我們用到著名的 Euler 恆等式 (最美的公式!)[4]

$$e^{i\pi}+1=0 \quad\Longrightarrow\quad -1=e^{i\pi}. \tag{3.4}$$

圍道 (contour) 可以拆解爲四段: $C=C_1+C_2+C_3+C_4$,

$$\begin{aligned}&C_1:\rho\to z=x\to R, && C_2=C_R: z=Re^{i\theta}, \quad 0\to\theta\to 2\pi,\\ &C_3:R\to z=xe^{i2\pi}\to\rho, && C_4=C_\rho: z=\rho e^{i\theta}, \quad 2\pi\to\theta\to 0.\end{aligned}$$

所以圍道積分 (contour integral) 爲

$$\oint_C \frac{z^{-a}}{1+z}dz = \int_\rho^R \frac{x^{-a}}{1+x}dx + \int_{C_R}\frac{z^{-a}}{1+z}dz + e^{-i2a\pi}\int_R^\rho \frac{x^{-a}}{1+x}dx + \int_{C_\rho}\frac{z^{-a}}{1+z}dz.$$

但

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_\rho}\frac{z^{-a}}{1+z}dz\right| &\le \frac{\rho^{-a}}{1-\rho}2\pi\rho = \frac{2\pi}{1-\rho}\rho^{1-a}\to 0 \qquad (\rho\to 0),\\ \left|\int_{C_R}\frac{z^{-a}}{1+z}dz\right| &\le \frac{R^{-a}}{R-1}2\pi R = \frac{2\pi R}{R-1}\frac{1}{R^a}\to 0 \qquad (R\to\infty),\end{aligned}$$

故

$$2\pi i e^{-ia\pi} = (1-e^{-i2a\pi})\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{1+x}dx,$$

也就是

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{1+x}dx = 2\pi i\frac{e^{-ia\pi}}{1-e^{-i2a\pi}}\frac{e^{ia\pi}}{e^{ia\pi}} = \pi\frac{2i}{e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}. \qquad \square$$

[4]高斯曾說:一個人第一次看到這個公式而不感到它的魅力, 他不可能成爲一個數學家。這等式有 1、0 分別是乘法、加法這兩個基本運算系統的單位元素, 整個數字系統最根本的概念。還有三個運算方法: 乘、加與次方。兩個特別的數: 指數 e (代表自然增長) 與圓周率 π 再加上 i 這個虛數單位。透過這個等式將數學三大領域 π (幾何)、e (分析) 與 i (代數) 連繫在一起。物理學家費曼 (Richard Feynman, 1918~1988) 稱它是一個卓越的公式:“將指數函數擴張到複數瞬間打通幾何、分析與代數的隔閡, 彷彿在混沌中創造了秩序。”

註解:

(i) 藉由量綱分析容易判斷積分 (3.1) 中 a 的範圍

$$\int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x}dx \approx [x]^{-a}[dx] = [x]^{1-a}, \qquad [x]\to 0 \quad \Longrightarrow \quad a<1, \tag{3.5}$$

這部分正好與C_ρ的圍道積分中出現的量級ρ^{1-a}是一致的, 其次

$$\int_1^\infty \frac{x^{-a}}{1+x}dx \approx \frac{[x]^{-a}}{[x]}[dx] = [x]^{-a}, \qquad [x]\to \infty \quad \Longrightarrow \quad a>0, \tag{3.6}$$

此時恰恰對應 C_R 的圍道積分的量級 R^{-a} !

(ii) 如果只看 (3.1) 的積分, 當然 a 的範圍只能是 $0<a<1$。但是最後的公式 $\frac{\pi}{\sin(a\pi)}$ 並沒有這個限制, 實際上透過 Γ-函數所滿足的函數方程與解析延拓 (analytic continuation), 可以將 a 拓展到整個複數平面 $a\in\mathbb{C}$, 但 $a\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots$。

(iii) (3.1) 這個積分是正弦函數 (的倒數), 坦白而言並不是那麼直觀! 但是證明的過程仍可以看出一些蛛絲馬跡。主要的癥結是 x^{-a} 的 branch cut, 除了 x^{-a} 本身之外, 經過旋轉與變換方向它成為 $-x^{-a}e^{-2\pi ia}$, 兩者合併正弦函數 $\sin(a\pi)$ 自然就出現

$$1-e^{-2\pi ia} = 2ie^{-\pi ia}\left(\frac{e^{\pi ia}-e^{-\pi ia}}{2i}\right) \quad \Longrightarrow \quad \sin(a\pi).$$

(iv) 在更早之前歐拉於 1743 年藉由其它方法就得到 (3.1) 這個積分的一般式

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^b}dx = \frac{\pi}{b\sin\frac{a}{b}\pi}, \qquad 0<a<b. \tag{3.7}$$

有興趣的讀者可以模仿 (3.5)– (3.6) 利用量綱分析判斷 a,b 的範圍。 □

餘元公式 (1.27) **之證明**: 根據 (1.21)

$$\mathscr{B}(1-z,z) = \int_0^1 t^{-z}(1-t)^{z-1} = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{-z}\frac{dt}{1-t}.$$

此時再引進變數變換 $x=\frac{t}{1-t}$ 或 $t=\frac{x}{1+x}$, 則由例題 3.1 可得

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \mathscr{B}(1-z,z) = \int_0^\infty \frac{x^{-z}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin\pi z}.$$ □

4. 無窮乘積 — Weierstrass 的觀點

『一個數學家, 如果他不在某種程度上成爲一個詩人, 那麼他就永遠不可能成爲一個完美的數學家。』

— Karl Weierstrass (1815∼1897) —

數學史上第一次出現的無窮乘積 (infinite product) 可以追溯自法國業餘數學家 François Viète (1540∼1603), 他的本業是律師。藉由半角公式 Viéte 得

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdots\cdot. \tag{4.1}$$

有人稱 Viéte 無窮乘積是現代數學的一道曙光, 此時人們不得不面對無窮 (infinite) 與極限 (limit), 這是第一次在數學公式中有無窮步驟出現, 同時也宣告了現代分析學的濫觴。其次則是 Wallis 無窮乘積 (Wallis infinite product), Wallis 將圓周率 π 表示爲正整數的無窮乘積

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots. \tag{4.2}$$

這個公式比 Viéte 無窮乘積 (4.1) 更優越, 稱得上是數學中最漂亮的公式之一。它給出了正整數與圓周率 π 之間最異乎尋常的關係, 但真正把無窮乘積提昇爲一個理論, 則是歐拉 (Euler) 的貢獻。

定理 4.1: (Euler 1748)

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)=z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots. \tag{4.3}$$

如果令 $z=\frac{\pi}{2}$ 則由正弦函數的無窮乘積 (4.3) 可得 Wallis 無窮乘積;

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\cdots=\frac{2}{\pi}.$$

左邊可以再分解爲

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots=\frac{2}{\pi},$$

或者

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots=\frac{2}{\pi}.$$

這個數的倒數就是 Wallis 無窮乘積 (4.2)。實際上 Euler 正弦函數的無窮乘積遠比 Wallis 無窮乘積來得更一般也更實用, 詳細的討論請參考 [18]。這個定理最終的形式爲 Weierstrass 分解定理。這是 Weierstrass 研究整函數 (entire function) 時發現的; 類似於多項式函數的因式分解, 整函數也可以因式分解, 或者可以視爲整函數版本的代數基本定理。Weierstrass 分解理論的直觀看法如下: 設 $f(z)$ 是一解析函數且其單根 (simple root) 是 $z=a_k$

$$f(a_k)=0,\qquad \lim_{k\to\infty}|a_k|=\infty,\qquad k=1,2,3,\ldots,$$

所以 $f'(z)$ 也是解析函數。由 Taylor 展開式可知, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 是 f 的對數微分 $\frac{d}{dz}\log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一階極點 (simple pole) 且其留數

$$\operatorname{Res}\left(\frac{d}{dz}\log f(z); a_k\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}; a_k\right) = 1, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots; \tag{4.4}$$

此時由 Mittag-Leffler 定理可得

$$\frac{d}{dz}\log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right). \tag{4.5}$$

對 (4.5) 積分後兩邊取指數 (exp), 則

$$f(z) = Ce^{\frac{f'(0)}{f(0)}z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}}.$$

令 $z = 0$, 則 $C = f(0)$, 這就是 Weierstrass 分解定理

$$f(z) = f(0)e^{\frac{f'(0)}{f(0)}z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}}. \tag{4.6}$$

利用 (4.6) 這個公式, 再回頭看 $\sin z$ 的無窮乘積

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}, \qquad f(0) = 1, \qquad f'(0) = 1. \tag{4.7}$$

此時 $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ 之單根是 $z = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, 仿 (4.5) 先考慮對數微分得 $\frac{\sin z}{z}$ 的 Mittag-Leffler分解:

$$\frac{d}{dz}\log\left(\frac{\sin z}{z}\right) = \cot z - \frac{1}{z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right), \qquad n \neq 0, \tag{4.8}$$

積分

$$\log\left(\frac{\sin z}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{z}{n\pi} + \log(n\pi - z) - \log n\pi\right), \qquad n \neq 0$$

之後取指數(n 分成正負處理)

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\Big(1 - \frac{z}{n\pi}\Big)e^{\frac{z}{n\pi}}\right]\left[\Big(1 + \frac{z}{n\pi}\Big)e^{-\frac{z}{n\pi}}\right] = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),$$

正是 Euler 著名的結果 (4.3)。

讀數學一定要有例子, 要理解 Weierstrass 分解定理, 最好的方法就是將正弦函數融會貫通之後, 將 Γ-函數當成最重要的應用:

定理 4.2: Γ-函數可以表示爲 Weierstrass 形式的無窮乘積

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}},\tag{4.9}$$

其中 γ 是 Euler-Mascheroni 常數, 它的選取必須滿足 $\Gamma(1)=1$。

證明: 整個想法可以拆解爲四個步驟:

(1) 根據瑕積分與指數函數的特性

$$\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n}e^{-t}t^{z-1}dt,\qquad e^{-t}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n},$$

將 Γ 函數表示爲極限

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}t^{z-1}dt\overset{\text{def}}{=}\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(z),\tag{4.10}$$

通常稱之爲Euler 極限公式。

(2) 考慮變數變換 $t=nx$ 與分部積分, 將 $\Gamma_n(z)$ 改寫爲

$$\Gamma_n(z)=n^z\int_0^1(1-x)^nx^{z-1}dx=n^z\frac{n}{z}\int_0^1(1-x)^{n-1}x^zdx.$$

繼續分部積分, 直到因子 $(1-x)^{n-1}$ 消失

$$\begin{aligned}\Gamma_n(z)&=n^z\frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\int_0^1x^{z+n-1}dx\\&=n^z\frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)}\\&=\frac{n^z}{z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}.\end{aligned}\tag{4.11}$$

(3) 將 n^z 指數化:

$$n^z=e^{\ln(n^z)}=e^{z\ln n}=e^{-z(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n)}\prod_{k=1}^{n}e^{\frac{z}{k}}.\tag{4.12}$$

(4) 由 (4.11) 取極限並利用 (4.12) 得

$$\begin{aligned}\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(z)&=\frac{1}{z}\lim_{n\to\infty}e^{-z(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n)}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}e^{\frac{z}{k}}\\&=\frac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}}.\end{aligned}$$

這裡出現的常數

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right] \approx 0.5772156649..... \tag{4.13}$$

就是著名的 Euler 常數 (Euler constant)。 □

註解:

(i) 這個證明同時也給出Γ-函數三個定義的等價性。

(ii) 藉由無窮乘積, 除了可以重新定義正弦函數 (4.3) 之外, 也可以定義餘弦函數。但此時我們需要等式 $\sin 2z = 2\sin z\cos z$, 則由 (4.3) 消去 $2z$ 與偶數階得

$$\cos z = \frac{\sin 2z}{2\sin z} = \frac{2z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{n^2\pi^2}\right)}{2z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right). \tag{4.14}$$

同理雙曲函數也有類似的結果

$$\begin{cases} \sinh z = \dfrac{\sin(iz)}{i} = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{z^2}{n^2\pi^2}\right), \\ \cosh z = \cos(iz) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{4z^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right). \end{cases} \tag{4.15}$$

無窮多個一次多項式的相乘竟然是一個週期函數, 這實在是超乎想像! 難怪德國數學家 Jacobi 有此感觸

『數學最迷人的地方, 是同一個函數既能解釋整函數分解又能描述鐘擺運動。』

— Carl Jacobi (1804∼1851) —

Jacobi 指的是正弦函數! 事實上這正是數學教育最應傳遞的智慧精髓。

(iii) 有時候我們喜歡將 (4.9) 表示爲倒數 (reciprocal)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}. \tag{4.16}$$

此時 $\frac{1}{\Gamma(z)}$ 是零 (單) 根爲 $0, -1, -2, \ldots$ 的全 (整) 函數 (entire function), 所以 Weierstrass 分解定理可以應用上。

(iv) (4.10) 這個收斂性問題是分析 (特別是實變函數論) 中一個重要的結果, 通常需要 Lebesgue 控制收斂定理以保證積分與極限交換的合法性。而且必須是 Γ_n 這個形式透過

分部積分才能將 Γ-函數表示爲無窮乘積, 這也是 Γ_n 最主要的目的, 並不是心血來潮神來之筆。 □

餘元公式 (1.27) **之證明**: 由 Γ-函數的無窮乘積 (4.9) 或 (4.16) 可得

$$\frac{1}{\Gamma(z)}\frac{1}{\Gamma(-z)} = -z^2 e^{\gamma z} e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}} = -z^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

利用關係式 $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$ 得

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \tag{4.17}$$

但由正弦函數著名的無窮乘積 (4.3) 可以推論

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}. \tag{4.18}$$

取倒數就是餘元公式或 Euler 反射公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{4.19}$$

□

5. 週期函數 — Fourier 的觀點

『深入研究大自然是所有數學發現最富饒的來源, 不僅對於決定良好的目標有好處, 也有助於排除含糊的問題, 無用的計算。這是建立分析學本身的手段, 也協助我們發現科學裡最緊要、最應永遠維繫的概念。最基本的概念就是表現自然事件的概念。』

— 熱的解析理論 (J. Fourier, 1768∼1830) —

既然餘元公式是正弦函數, 這是一個週期函數自然就聯想到 Fourier 級數。考慮這個特別的函數

$$f(x) = \cos(zx), \qquad |x| \le \pi, \qquad z \ne 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

及其 Fourier 級數展開式

$$f(x) = \cos(zx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{5.1}$$

因爲$f(x) = \cos(zx)$是偶函數, 所以$b_n = 0$, 常數項要直接計算

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ztdt = \frac{2\sin \pi z}{\pi z}. \tag{5.2}$$

而 $a_n, n = 1, 2, \ldots$則爲

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos zt\cos ntdt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big[\cos(z-n)t + \cos(z+n)t\Big]dt \\ &= \frac{\sin(z-n)\pi}{(z-n)\pi} + \frac{\sin(z+n)\pi}{(z+n)\pi} \\ &= \frac{\sin\pi z\cos(n\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right] = \frac{\sin\pi z}{\pi}\frac{2z(-1)^n}{z^2-n^2}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

所以 $\cos(zx)$ 的 Fourier 級數爲

$$\cos(zx) = \frac{\sin\pi z}{\pi}\left[\frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^2-n^2}\cos nx\right], \qquad |x| \le \pi. \tag{5.4}$$

令 $x = 0$ 則 (5.4) 成爲

$$f(0) = 1 = \frac{\sin\pi z}{\pi}\left[\frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^2-n^2}\right].$$

由此可得 $\frac{\pi}{\sin\pi z}$ 的部分分式表現式

$$\frac{\pi}{\sin\pi z} = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^2-n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right). \tag{5.5}$$

另外 Beta 函數的部分分式表現式可以表示爲

引理 5.1: 已知 $0 < z < 1$ 則

$$\begin{aligned} \mathscr{B}(z, 1-z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^{\infty}\frac{x^{z-1}}{1+x}dx \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right). \end{aligned} \tag{5.6}$$

解: Beta 函數 $\mathscr{B}(z, 1-z)$ 是瑕積分 (improper integral), 可以拆解爲兩部分

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{z-1}}{1+x}dx = \int_0^{1}\frac{x^{z-1}}{1+x}dx + \int_1^{\infty}\frac{x^{z-1}}{1+x}dx \stackrel{\text{def}}{=} \hat{I}_1 + \hat{I}_2.$$

先考慮 $\hat{I}_1$, 利用等比級數與一致收斂可得

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= \int_0^{1}\frac{x^{z-1}}{1+x}dx = \int_0^{1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{z+n-1}dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z+n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z+n} \end{aligned} \tag{5.7}$$

其次是 $\hat{I}_2$, 由於 $x \geq 1$ 等比級數無法直接派上用場, 可以考慮變數變換 $t = \frac{1}{x}$ 之後仿 (5.7) 得

$$\begin{aligned}\hat{I}_2 &= \int_1^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{t^{-z}}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^{(1-z)-1}}{1+t}dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{n+1-z} = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{z-n}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

(5.7)、(5.8) 兩式合併就是 (5.6) 。 □

註解:

(i) 由部分分式 (5.6) 清楚知道 $z = n \in \mathbb{Z}$ 是 $\mathscr{B}(z, 1-z)$ 的一階極點 (simple pole) 且留數爲

$$\text{Res}\Big(\mathscr{B}(z, 1-z), n\Big) = (-1)^n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

這與 (1.22)、(1.24) 是一致的。另外 (5.7)、(5.8) 則分別告訴我們 $z = -n$ (負整數) 的極點產生在 $0 < x < 1$, 而 $z = n$ (正整數) 的極點產生在 $1 < x < \infty$。

(ii) 令 $x = \pi$ 並利用 $\cos n\pi = (-1)^n$ 則由 (5.4) 可得$\pi \cot \pi z$的部份分式:

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2z}{z^2 - n^2}, \tag{5.9}$$

或者做個變數變換 $\pi z \to z$ 得 $\cot z$ 的部份分式:

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2z}{z^2 - (n\pi)^2}. \tag{5.10}$$

(5.10) 也告訴我們 $\cot z$ 的極點在 $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, 且其留數都是 1。順便一提

$$\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi} \sim -\frac{2z}{n^2\pi^2},$$

故 (5.10) 這個部份分式是收斂的 (summable), 然而如果分開看

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{z-n\pi}, \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{z+n\pi}$$

則是發散的!

(iii) 從複變函數論的角度我們比較喜歡將 (5.10) 改寫成底下 (收斂) 之形式

$$\begin{aligned}\cot z &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right) + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{z+n\pi} - \frac{1}{n\pi}\right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^\infty \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right), \qquad n \neq 0.\end{aligned} \tag{5.11}$$

這就是 $\cot z$ 的 Mittag-Leffler 展開式 (Mittag-Leffler expansion), 多出來的分式 $\pm\frac{1}{n\pi}$ 可以保證級數的收斂性。

(iv) 由正弦函數的無窮乘積 (4.3) 取對數微分也可得 $\cot z$ 的部份分式 (5.10)。回過頭來將 (5.10) 刻意表示爲

$$\cot z - \frac{1}{z} = \frac{2z}{z^2-\pi^2} + \frac{2z}{z^2-2^2\pi^2} + \frac{2z}{z^2-3^2\pi^2} + \cdots. \tag{5.12}$$

當 $z \to 0$, 左式趨近於 0 (L'Hospital 法則), 由 Weierstrass–M 審驗法知 (5.12) 右邊之級數是一致收斂 (uniformly convergent), 因此可以逐項積分

$$\int_0^x \left(\cot z - \frac{1}{z}\right)dz = \int_0^x \frac{2z}{z^2-\pi^2}dz + \int_0^x \frac{2z}{z^2-(2\pi)^2}dz + \cdots.$$

所以

$$\log\left(\frac{\sin z}{z}\right)\Big|_0^x = \log\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right) + \log\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right) + \cdots.$$

因爲 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, 然後由對數函數的連續性得

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left[\log\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\log\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\cdots\log\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\log\left[\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)\right]\\ &= \log\left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)\right].\end{aligned}$$

對數函數是一對一函數我們可以再次得正弦函數的無窮乘積 (4.3)

$$\frac{\sin x}{x} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)\right] = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right). \quad \square$$

餘元公式 (1.27) **之證明**: 由 (5.5)–(5.6) 可推得 Euler 餘元公式

$$\mathscr{B}(z,1-z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x}dx = \int_0^\infty \frac{x^{-z}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad \square$$

正弦函數的倍角公式可以表示爲都是正弦函數的乘積

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\sin x \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right). \tag{5.13}$$

同理三倍角公式則是

$$\begin{aligned}\sin 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x = 4\sin x\left(\frac{3}{4} - \sin^2 x\right)\\&= 4\sin x\left(\frac{3}{4}\cos^2 x - \frac{1}{4}\sin^2 x\right)\\&= 4\sin x\left(\sin^2\frac{\pi}{3}\cos^2 x - \cos^2\frac{\pi}{3}\sin^2 x\right)\\&= 4\sin x\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)\\&= 4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\\&= 4\sin x\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right),\end{aligned} \tag{5.14}$$

或是更一般的 n 倍角公式

$$\sin nx = 2^{n-1}\sin x\cdot\sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right)\cdots\sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right). \tag{5.15}$$

餘弦函數也有類似的公式, 有興趣的讀者可以自己練習。中學生能夠推導出這些公式是非常難能可貴的。餘元公式指出了正弦函數與 Γ-函數之聯繫, 不禁令人猜想對於 Γ-函數也有類似的倍角公式!

定理 5.2: (Legendre 加倍公式, 1809)

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right). \tag{5.16}$$

如果 $z = \frac{1}{2}$ 則可重新得 Gauss-Poisson 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{5.17}$$

證明一: 基於正弦函數倍角公式之靈感, 透過 (1.20) 可以將 $\mathscr{B}(z,z)$ 表示爲

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(z,z) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2z-1}\theta\sin^{2z-1}\theta d\theta\\&= 2^{2-2z}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin\theta\cos\theta)^{2z-1}d\theta \qquad (\phi = 2\theta)\\&= 2^{1-2z}\int_0^{\pi}(\sin\phi)^{2z-1}d\phi = \frac{1}{2^{2z-1}}\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}, z\right).\end{aligned} \tag{5.18}$$

利用 Euler 公式 (1.12) 將上式改寫爲

$$\frac{[\Gamma(z)]^2}{\Gamma(2z)} = \frac{1}{2^{2z-1}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(z)}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}.$$

但是 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, 如此得 Legendre 加倍公式 (5.16)

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z). \qquad \square$$

證明二: 因爲 $x = \frac{1}{2}$ 是對稱軸, 可以將 Beta 函數 $\mathscr{B}(z,z)$ 拆成兩等分

$$\mathscr{B}(z,z) = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{z-1}dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \big[x(1-x)\big]^{z-1}dx. \tag{5.19}$$

簡單的配方並考慮變數變換$\frac{1}{2}\sqrt{t} = \frac{1}{2} - x$得

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(z,z) &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4} - \Big(\frac{1}{2} - x\Big)^2\right]^{z-1} dx \\ &= \frac{1}{2^{2z-1}}\int_0^1 (1-t)^{z-1}t^{\frac{1}{2}-1}dt = \frac{1}{2^{2z-1}}\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}, z\right),\end{aligned}$$

其餘部分與前面相同。如果要省略配方法, 這一步可以利用 $x = \frac{1}{2}$ 是對稱軸考慮變數變換

$$x = \frac{1+s}{2}, \qquad 1-x = \frac{1-s}{2}, \qquad -1 \le s \le 1, \tag{5.20}$$

則 (5.19) 換爲

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(z,z) &= \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{z-1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \left(\frac{1+s}{2}\right)^{z-1}\left(\frac{1-s}{2}\right)^{z-1} ds \qquad (5.21) \\ &= \frac{1}{2^{2z-1}}\int_{-1}^1 (1-s^2)^{z-1}ds = \frac{1}{2^{2z-1}}\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}, z\right). \qquad \square\end{aligned}$$

註解:

(i) 由 (5.18) 或 (5.19), 可以看出之所以加倍公式會成立, 主要原因是 $\cos\theta$ 與 $\sin\theta$ 或 x 與 $1-x$ 有相同的次冪, 因此正弦函數的倍角公式或配方法在此派得上用場!

(ii) 令$\Phi(z) = \sin(\pi z)$, 則由 (5.13) 容易看出正弦函數倍角公式與 Γ-函數之 Legendre 加倍公式 (5.16) 兩者之間的類比

$$\Phi(2z) = 2\Phi(z)\Phi\left(z+\frac{1}{2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

換句話說: 透過餘元公式, 研究Γ-函數的加倍公式等價於正弦函數的倍角公式!

(iii) Legendre 加倍公式 (5.16) 的典型證明 (但不容易想像!) 是考慮

$$\varphi(z) \equiv \frac{2^{z-1}\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{z+1}{2})}{\Gamma(z)}, \tag{5.22}$$

然後證明 φ 是一個週期等於 1 的週期函數

$$\varphi(z) = \varphi(z+1) = \cdots = \varphi(z+n).$$

令 $n \to \infty$, 再由 Stirling 公式結論 φ 是一常數函數, 而且

$$\varphi(z) = \varphi(z+n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(z+n) = \sqrt{\pi}. \qquad \square$$

由餘元公式 (1.27) 分別取 $z = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ 得

$$\begin{aligned}
\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big) &= \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}},\\
\Gamma\Big(\frac{2}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-2}{n}\Big) &= \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}},\\
&\ \vdots\\
\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big) &= \frac{\pi}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

這些等式垂直相乘得

$$\left[\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{2}{n}\Big)\cdots\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\right]^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}. \tag{5.23}$$

但是分母是著名的三角恆等式 (由 (5.15) 令 $x \to 0$)

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{2^{n-1}\sin x} = \frac{n}{2^{n-1}}. \tag{5.24}$$

所以 (5.23) 開根號得 Euler 乘積公式

$$\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)\Gamma\Big(\frac{2}{n}\Big)\cdots\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\sqrt{n}}. \tag{5.25}$$

這是 Gauss 乘積公式 (5.26) 或 (5.27) 的特例！

定理 5.3: (Gauss乘積公式, 1812) 給定 $m \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(z)\Gamma\Big(z+\frac{1}{m}\Big)\cdots\Gamma\Big(z+\frac{m-1}{m}\Big) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)}m^{\frac{1}{2}-mz}\Gamma(mz). \tag{5.26}$$

如果 z 換爲 $\frac{z}{m}$ 則是

$$\Gamma\left(\frac{z}{m}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{z+m-1}{m}\right)=(2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)}m^{\frac{1}{2}-z}\Gamma(z). \tag{5.27}$$

證明: 詳細的證明在此沒有必要, 有興趣的讀者可以參考 ([2], [6], [7], [15])。 □

註解:

(i) 這是高斯在 1812 年所證明, 1874 年柏林大學三巨頭之一的 E. E. Kummer 給了另一個證明。

(ii) 仿倍角公式可以得出 Gauss 乘積公式 (5.26) 與正弦函數 $\Phi(z)=\sin\pi z$ 的類比

$$(5.26) \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(nz)=2^{n-1}\Phi(z)\Phi\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Phi\left(z+\frac{n-1}{n}\right).$$

(iii) (5.24) 這個三角恆等式可以從等分圓方程 (cyclotomic equation) 推得, 令

$$\omega_k \overset{\text{def}}{=} e^{\frac{i2k\pi}{n}}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k=1,2,\ldots,n-1,$$

則

$$\begin{aligned}|1+z+\cdots+z^{n-1}|=\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right|&=|z-\omega_1||z-\omega_2|\cdots|z-\omega_{n-1}|\\&=\prod_{k=1}^{n-1}\left|z-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right|.\end{aligned} \tag{5.28}$$

令 $z=1$ 並利用倍角公式得

$$\begin{aligned}\left|1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right|&=\sqrt{\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2+\left(\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2}\\&=\sqrt{2-2\cos\frac{2k\pi}{n}}=2\sin\frac{k\pi}{n}.\end{aligned} \tag{5.29}$$

代入 (5.28) 就是 (5.24)。 □

乘積公式有甚麼用處? 例如 (5.24) 兩邊同時取對數, 再乘上 $\frac{\pi}{2n}$, 接著取極限 $n\to\infty$ 就是 Riemann 和, 因此可得對數正弦函數的積分

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x dx&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\log\sin\frac{k\pi}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{2n}\\&=\lim_{n\to\infty}\Big(\log n-(n-1)\log 2\Big)\frac{\pi}{2n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{2n}-\log 2\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\pi}{2n}=-\frac{\pi}{2}\log 2.\end{aligned} \tag{5.30}$$

更一般情形則是

例題5.4:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos x dx=-\frac{\pi}{2}\log 2. \tag{5.31}$$

解: 如果沒有乘積公式, 典型的證明是利用對稱性而來的變數變換。先考慮變數變換

$$x=y-\frac{\pi}{2}\quad\Longrightarrow\quad\sin x=-\cos y,$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\log\cos y dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos x dx.$$

其次由倍角公式得

$$\begin{aligned}2I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{2\sin x\cos x}{2}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin 2x dx-\frac{\pi}{2}\log 2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log\sin\xi d\xi-\frac{\pi}{2}\log 2\quad(\xi=2x).\end{aligned}$$

最後等式右邊之積分可以拆解為

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\log\sin\xi d\xi&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\xi d\xi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log\sin\xi d\xi\\&=I+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\left(\eta+\frac{\pi}{2}\right)d\eta\qquad\left(\eta=\xi-\frac{\pi}{2}\right)\\&=I+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos\eta d\eta=2I.\end{aligned}$$

帶回上式

$$2I=I-\frac{\pi}{2}\log 2\quad\Longrightarrow\quad I=-\frac{\pi}{2}\log 2.$$

□

同理 Γ-函數也有類似的結果。

例題 5.5: (Raabe 積分)[5]

$$\int_0^1\log\Gamma(x)dx=\frac{1}{2}\log(2\pi). \tag{5.32}$$

[5] Joseph Ludwig Raabe (1801∼1859) 一個非常陌生的名字通常被歸類爲瑞士數學家, 但實際上他是出生在烏克蘭。由於家境貧窮他一路是靠著當家教養活自己並接受教育。Raabe 最著名的工作是關於無窮級數的收斂性判定方法, 這是 d'Alembert 比較審驗法 (ratio test) 的推廣。另外就是Γ-函數的積分就是這個例題的瑕積分。

解法一: 由 (5.25) 兩邊同時取對數

$$\log\Gamma\Big(\frac{1}{n}\Big)+\log\Gamma\Big(\frac{2}{n}\Big)\cdots+\log\Gamma\Big(\frac{n-1}{n}\Big)=\frac{n-1}{2}\log(2\pi)-\frac{1}{2}\log n,$$

之後同時乘 $\frac{1}{n}$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\log\Gamma\Big(\frac{k}{n}\Big)\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\log(2\pi)\cdot\frac{n-1}{n}-\frac{1}{2n}\log n.$$

再取極限$n\to\infty$, 左邊視爲 Riemann 和、右邊利用 L'Hospital 法則, 可以結論

$$\int_0^1\log\Gamma(x)dx=\frac{1}{2}\log(2\pi).$$

解法二: 這是餘元公式的應用。首先變數變換可以得

$$\int_0^1\log\Gamma(x)dx=\int_0^1\log\Gamma(1-x)dx.$$

因此餘元公式取對數之後積分得

$$\begin{aligned}\int_0^1\log\big(\Gamma(x)\Gamma(1-x)\big)dx&=\int_0^1\log\Gamma(x)dx+\int_0^1\log\Gamma(1-x)dx\\&=\log\pi-\int_0^1\log\sin\pi x dx.\end{aligned}$$

所以根據例題 5.4 的結果得

$$\begin{aligned}\int_0^1\log\Gamma(x)dx&=\frac{1}{2}\Big(\log\pi-\int_0^1\log\sin\pi x dx\Big),\\&=\frac{1}{2}\Big(\log\pi-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\log\sin x dx\Big)=\frac{1}{2}\log(2\pi).\end{aligned}$$ □

註解:

(i) 討論 (5.31) 這個瑕積分的收斂性是相當有趣的。首先它沒有太胖的問題, 關於太瘦的問題主要是 $x=0$, 此時的靈感是著名的極限

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\quad&\iff\quad\sin x\approx x,\qquad 0<x\ll1,\\&\iff\quad\log\sin x\approx\log x,\qquad 0<x\ll1.\end{aligned}$$

利用 L'Hospital 法則可以證明

$$\lim_{x\to0}\frac{\log\sin x}{\log x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=\Big(\lim_{x\to0}\cos x\Big)\Big(\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\Big)=1.$$

因此這兩個積分是同時收斂或同時發散! 但是藉由分部積分與 L'Hospital 法則可得

$$\int_0^1 \log x dx = x \log x\Big|_0^1 - \int_0^1 x d \log x = -\int_0^1 dx = -1.$$

因此我們有充分的理由相信 (5.31) 這個瑕積分是收斂的!

(ii) 更一般形式的 Raabe 積分為

$$\int_a^{a+1} \log \Gamma(x) dx = \frac{1}{2}\log(2\pi) + a\log a - a, \qquad a \geq 0. \tag{5.33}$$

參考文獻

1. G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy, *Special Functions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Vol. 71, Cambridge University Press, New York, 1999.
2. E. Artin, *The Gamma Function*, Dover Publications; Reprint edition (Jan. 28, 2015)。

    "高手出招, 就是與眾不同!" Artin 的專著讓許多學生初次領略何謂『眞正的分析』。Artin 對分析有著深刻的理解, 並以大師之筆進行闡釋。一代又一代的教師和學生都受益於 Artin 這本經典著作。Artin 將 Γ-函數建立在 Bohr-Mollerup 定理: 該定理指出在 $z > 0$ 的區間上, Γ-函數是唯一同時滿足以下三個性質的函數;

    (1) $\log f(z)$ 是一個凸函數 (convex function),
    (2) f滿足函數方程: $f(z+1) = zf(z), \forall z > 0$,
    (3) $f(1) = 1$.

    這一定理將 Γ-函數的三個簡單的性質提煉出來, 並斷言僅需這三個條件就可以唯一確定 Γ-函數。順便一提這個丹麥數學家波爾 (Harald Bohr, 1887∼1951) 正是大物理學家量子力學創始人之一 Niel Bohr (1885∼1962) 的弟弟!

3. John B. Conway, *Functions of One Complex Variables I*, 2nd Edition, GTM Vol. 11, Springer-Verlag, 2001.

    數學系 (大學部) 的複變只有一個學期, 之後並沒有與之相關的選修課, 坦白而言這樣的訓練頂多只有工程數學的程度。在我的看法: 一個數學系的學生, 其複變函數論的涵養至少要包含這本書的內容。因此合理的課程設計應該是必修一學期之外, 還加一學期選修。Conway 處理 Γ-函數的方式與本文第四節相同, 都是典型分析的思想: Euler 極限公式。由於作者的專長是泛函分析, 所以將 $\frac{1}{\Gamma(z)}$ 視為全 (整) 函數 (entire function), 再藉由這個空間的完備性以保證極限的存在性。

4. Philip J. Davis, Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function: In Memoriam: Milton Abramowitz, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 66, No. 10 (Dec., 1959), 849-869.
5. Lars Garding, *Encounter with Mathematics*, Springer-Verlag, New York, Inc, 1977. 中譯本: 數學概觀, 胡作玄譯, 數學名著譯叢, 科學出版社 (中國), 2001。
6. Einar Hille, *Analytic Function Theory*, Vol. 1 & 2, 2nd edition, AMS Chelsea Publishing, 2012.

作者正是泛函分析中半群 (semigroup) 理論之 Hille-Yosida 定理的主角之一的 Carl Einar Hille (1894∼1980)。他是出生在美國的瑞典人 (當然是美國人), 但是他完整的教育是在瑞典完成的。他是匈牙利數學家 Marcel Riesz 的學生。除了這套書之外他與 Ralph Phillips 合寫的 Functional Analysis and Semi-Groups 可能更出名, 我是學生的年代這些翻版書都還買得到, 而每個月底領到家教的薪水, 第一件事就是很有智慧地到書店買下這些名著。

7. Harry Hochstadt, *The Functions of Mathematical Physics*, Dover Publications, Inc. New York, 1986.
8. N. N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, translated by R. A. Silverman, Dover Publications, New York, 1972.
9. Paul J. Nahin, *An Imaginary Tale*: The story of $\sqrt{-1}$, Princeton University Press, New Jersey, 1998.

   Nahin 是一個很會講故事的科普作家, 他的書除了故事之外, 還有深刻的數學內涵都值得看。我教複變函數論時就將這本書列爲學生期末報告的參考著作。

10. E. D. Rainville, *Special Functions*, Macmillian New York, 1960.
11. David Salwinski, Euler's Sine Product Formula: An Elementary Proof, *The College Mathematics Journal*, Vol. 49, No. 2, pp. 126-135, 2018.
12. Laurent Schwartz, *Mathematics for the Physical Sciences*, Hermann Paris, 1966.

    我在 [18] 一文中已經介紹過這本寫得非常法國巴黎(高貴且優雅) 的名著, 讀者若想以較少篇幅且深入理解 Γ-函數與 Beta 函數, 可以看這本書的第八章 (當然包括它的習題)。

13. E. Stein and R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton Lectures in Analysis Vol. 2, Princeton University Press, 2003.
14. E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 5th Edition, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 2021.

    這本名著從未絕版, 我在 [18] 一文中已經介紹過, 本書其持續的價值, 在於它對數學物理中特殊函數及其衍生微分方程的分析, 進行了透徹詳盡的論述。本書也具有歷史價值, 因爲它是第一本介紹當時 (1902年) 現代複分析方法的英文著作, 這就說明爲何這本書在 20 世紀初取名爲*modern analysis* 的緣由。此書第 12 章討論 Γ-函數, 作者爲了方便該理論之發展, 所以是從 Weierstrass 無窮乘積出發。由多項式因式分解的角度來看一個函數是完全自然的, 書裡面的例題(Example) 實際上就是習題 (Exercise) 是沒有解答。讀數學要養成邊看、邊想與邊做題目的習慣, 有興趣的讀者 (就想像自己正在劍橋是 Whittaker 課堂上的學生) 應該把這些細節都補全。

15. 林義雄與林紹雄, 理論分析 (上、下), 正中書局, 1982。
16. 林琦焜, Euler (1707∼1783) 數學的莎士比亞, 數學傳播季刊, 26(2), 39-51, 2002。
17. 林琦焜, 關於 Euler 級數的幾個觀點, 數學傳播季刊, 36(1), 16-36, 2012。
18. 林琦焜, Wallis 積分與無窮乘積, 數學傳播季刊, 47(1), 20-41, 2023。
19. 林琦焜, 哈那克兄弟們 (Harnacks) — 數學與神學的雙生子, 數學傳播季刊, 48(4), 73-101, 2024。

—本文作者爲國立交通大學應用數學系退休教授—